# §12 Levi-Civita 联络 (Levi-Civita Connection)

Levi-Civita：意大利物理学家

他的一个重要数学贡献：为黎曼度量引入了相容的联络形式：由此我们可以恰当的定义一般黎曼流形的曲率。

**定义**：一个局部的二维黎曼曲面（流形）（或称为内蕴曲面）是指$(D; I)$其中

(1) $D \subset \mathbb{R}^2$ 单连通开集 ($D = \{u, v\}$)

(2) $I = I(u,v)$ 为定义在$D$上的正定对称二次型。

一般的：一个局部$n$维$(n \geq 1)$黎曼流形，是指$(D, I)$，其中

(1) $D \subset \mathbb{R}^n$ 为单连通开集 ($D = \{x^1, \cdots, x^n\}$)

(2) $I = I(x^1, \cdots, x^n) = \sum g_{ij} dx^i dx^j$ $D$上的正定二次型（黎曼度量）

例子：(1) 一维（局部）黎曼曲线

$((a,b),\ f(t)(dt)^2)$，$f(t) > 0,\ \forall t \in (a,b)$

(2) $\left(\mathbb{R}^2,\ \dfrac{4}{(1+a(u^2+v^2)^2)^2}(du^2+dv^2)\right)$，$a > 0$ 常数，

(3) $(\mathbb{R}^2,\ du^2+dv^2)$ 欧氏平面

(4) $\left(D,\ \dfrac{4}{(1-(u^2+v^2)^2)^2}(du^2+dv^2)\right)$ Poincaré 单位圆盘

单位圆盘 $=\{u^2+v^2<1\}$

(5) $\left(H, \dfrac{du^2+dv^2}{v^2}\right)$,

$H = \{(u,v)\in \mathbb{R}^2 \mid v>0\}$

(6) $(D,\ E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)$ $\quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix} > 0$

$\forall (u,v)\in D$.

(7), $(\mathbb{R}^3,\ dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)$, 三维欧氏空间.

__定义__: 设 $(D, I=\sum\limits_{1\le i,j\le n} g_{ij}dx^i dx^j)$ 为 $n$ 维黎曼流形.

若有: $\tilde{D} \xrightarrow{F} D$, $\quad F=(f^1,\cdots f^n)$, $\quad m\le n$

$\tilde{D}\subset\mathbb{R}^m$, $D\subset\mathbb{R}^n$, $\quad f^i = f^i(y^1,\cdots y^m)$, $\quad i=1,\cdots,n$

其中 $\tilde{D}\subset\mathbb{R}^m$ 为单连通区域, $F$ 为 $C^\infty$-映射. 且, $\forall (y^1,\cdots y^m)\in\tilde{D}$

$$\operatorname{rank}(J(F)) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^m} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial y^m} \end{pmatrix}_{n\times m} \text{处处} = m.$$

则 $\tilde{I} \stackrel{\Delta}{=} \sum (g_{ij}\circ F)\,df^i df^j$

$= \sum\limits_{1\le i,j\le m} \tilde{g}_{ij}\, dy^i dy^j$, 其中

$$(\tilde{g}_{ij})_{m\times m} = J(F)^T_{m\times n}\,(g_{ij})_{n\times n}\,J(F)_{n\times m}$$

为 $\tilde{D}$ 上的正定二次型.

$(\tilde{D},\tilde{I})$ 称为由 $F$ 诱导的 ($m$ 维) 黎曼流形. 记 ~~$(\tilde{D},\tilde{I})=F^*(D,I)$~~ 记 $\tilde{I}=F^*(I)$

证明：习题.

#

$\boxed{\text{特例}}$：$\tilde{D} \xrightarrow{r} D = \mathbb{R}^3$，　$I = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

$\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$

则 曲面 $r$ 的第一基本型 $= r^* I$.

证明：习题.

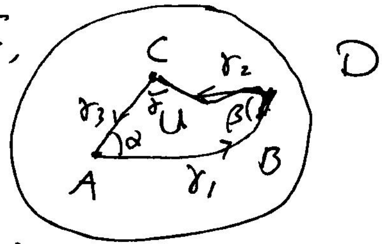
#

所谓的曲面的内蕴几何就是关于二维黎曼流形 $(\tilde{D}, I)$ 的几何. ($\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$)

~~也就是关于~~
问题：只有 $I$，我们谈什么样的几何呢？

回答：(1) 平面几何的一大块内容就是关于 $(\tilde{D}, I) = (\mathbb{R}^2, du^2 + dv^2)$ 的几何，所以上述几何是平面几何的自然推广.

(2) 对于曲线 $\gamma \subset D$，我们可以利用 $I$，计算定义 $\gamma$ 的弧长.




特别得：对给定两点 A, B，我们定义连接 AB 的"直线"为所有连接 AB 曲线中最短的那条.
（详见测地线的学习内容）

(3) 对于闭合曲线 $\gamma$ 围成的区域 $U$，我们可以计算 $U$ 的面积
（令 $I = E(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2$，其面积元 $dA = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$）

(4) $\forall p \in D$, 我们可以利用高斯的曲率公式定义一种曲率函数 $K(p)$.

这种曲率函数 $K$ 有一性质:

令 $(\tilde{D}, \tilde{I}) \xrightarrow{F} (D, I)$ 为等距同构.

则 $K_{\tilde{D}} = K_D \circ F \quad (= F^*(K_D))$

思考题: 为什么用高斯仅用 $E, F, G$ 及其一阶, 二阶偏导定义的函数为一种"内蕴"的曲率函数呢?

(5) 高斯第三定理 (高斯绝妙定理为 $\overset{\text{内蕴曲面几何(局部)中}}{\overbrace{\text{最}}}$ 为优美的定理):

设 $\Delta ABC$ 为测地三角形, 即 $\underbrace{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}_{\text{三边}}$ 均为测地线.

则 $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \iint_U K\,dA$. ($U$ 为 $\Delta ABC$ 围成的内部区域)

问题: 我们学的曲面几何和曲面内蕴几何相较有何联系?

回答: 曲面几何 $= (D, I, II)$ 的几何

$I, II$ 满足 Gauss-Codazzi

$= (D, I)$ 的几何 $+$ $II$ 的几何

$II$ 的几何关注: $(D, I) \xrightarrow{F} (\mathbb{R}^3, (dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2)$

给定 $(D, I)$, $F$ 的选取, 使得 $F^*(dx^{1\,2}+dx^{2\,2}+dx^{3\,2}) = I$.

经典例子: $(D, I) = (D, du^2+dv^2)$

$F_1 = \mathbb{R}^3$ 中的平面, $F_2 =$ 圆柱, $F_3 =$ 圆锥.

思考题: 是否对任给 $(D, I)$, $\exists\, \mathbb{R}^3$ 中曲面 $F$, 使得 $(D, I)$ 为 $F$ 的第一基本型? 局部呢?

问题: Levi-Civita 联络在 $(D, I)$ 的研究中起何作用?

回答: 桥梁作用:

$$(D, I) \rightsquigarrow \text{Levi-Civita 联络} \rightsquigarrow (\text{高斯})\text{曲率}$$

$(D, I)$ ‖ 黎曼度量.

## Levi-Civita 联络的算法定义:

step (1) 找二个1形式 $w_1, w_2$, 使得

$$I = w_1^2 + w_2^2.$$

算法:
$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$= \left(\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv\right)^2 + \left(G - \frac{F^2}{E}\right)dv^2$$
$$= \left(\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\,dv\right)^2$$

$$G - \frac{F^2}{E} = \frac{EG-F^2}{E}$$

令 $\begin{cases} w_1 = \sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv \\ w_2 = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\,dv \end{cases}$, $\quad (w_1, w_2) = (du, dv)\begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ \frac{F}{\sqrt{E}} & \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}} \end{pmatrix}$

命题: 设 $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ 满足 $\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2 = I$. 则 $\exists\ \theta = \theta(u, v)$ s.t

$$(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = (w_1, w_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

证明: 因为 $I$ 正定, 所以 $\{w_1, w_2\}$ 为 $D$ 的一组 1-基. 即

$$\{w_1, w_2\} = \{du, dv\} \cdot A, \quad \det A \neq 0, \quad A \in M_2(C), \ldots$$

令 $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\} = \{w_1, w_2\} \cdot B$.

则 $\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2 = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix}$

$$= (w_1, w_2) B \cdot B^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (w_1, w_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \theta(u, v).$$

#

stop (2) 对步骤(1)中的 $\{w_1, w_2\}$, 存在唯一的 $w_{12}$ (1形式), 满足方程

$$d\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} \\ -w_{12} & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

对于不同选取 $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$, 则有

$$\tilde{w}_{12} = w_{12} + d\theta.$$

证明: $dw_1 \cdot w_1 \wedge w_2$ 为 $\Omega^2 = \Theta\{du \wedge dv\}$ 的基. 则

$\exists\, a, b \in G$ s.t. $\begin{cases} dw_1 = \cancel{a w_1 + b w_2}\ a\, w_1 \wedge w_2 \\ dw_2 = b\, w_1 \wedge w_2 \end{cases}$

令 $w_{12} = a w_1 + b w_2$, 则有

$$dw_1 = (a w_1 + b w_2) \wedge w_2 = w_{12} \wedge w_2$$

$$dw_2 = w_1 \wedge (a w_1 + b w_2) = w_1 \wedge w_{12} = -w_{12} \wedge w_1$$

設 $w_{12}'$ 滿足

$$d\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12}' \\ -w_{12}' & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

則 $$\begin{pmatrix} 0 & w_{12}' - w_{12} \\ -(w_{12}' - w_{12}) & \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (w_{12}' - w_{12}) \wedge w_1 = (w_{12}' - w_{12}) \wedge w_2 = 0$$

$$\Rightarrow w_{12}' - w_{12} = 0.$$

現設 $$\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\} = \{w_1, w_2\} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left[\Rightarrow \cancel{\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2 = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot w_1 \wedge w_2 = w_1 \wedge w_2} \right]$$

$$\cancel{d\tilde{w}_1 = d(\cos\theta\, w_1 - \sin\theta}$$

$$\tilde{w}_1 + i\tilde{w}_2 = e^{i\theta} \cdot (w_1 + i w_2)$$

$$\cancel{\Rightarrow d(\tilde{w}_1 + i\tilde{w}_2) = d(\tilde{w}_1) + i\, d(\tilde{w}_2)}$$

$$\Rightarrow d(e^{i\theta} \cdot (w_1 + i w_2)) = i\, d\theta \cdot e^{i\theta} \wedge (w_1 + i w_2) + e^{i\theta} d(w_1 + i w_2)$$

已知:

(请验证) $\begin{cases} d(\omega_1+i\omega_2) = i\omega_{12}\wedge(\omega_1+i\omega_2) \\ d(\tilde{\omega}_1+i\tilde{\omega}_2) = i\tilde{\omega}_{12}\wedge(\tilde{\omega}_1+i\tilde{\omega}_2) \end{cases}$

$$= i\tilde{\omega}_{12}\wedge e^{i\theta}(\omega_1+i\omega_2)$$

$$= ie^{i\theta}\tilde{\omega}_{12}\wedge(\omega_1+i\omega_2)$$

故 $(i\cancel{e^{i\theta}})d\theta\wedge(\omega_1+i\omega_2)+i\cancel{e^{i\theta}}\omega_{12}\wedge(\omega_1+i\omega_2)$

$$= i\cancel{e^{i\theta}}\tilde{\omega}_{12}\wedge(\omega_1+i\omega_2)$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega}_{12} = d\theta+\omega_{12}$$

#

定义: $\omega_{12}$ 称为 I 在基 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 下的 Levi-Civita 联络 1-形式.

命题: $d\omega_{12}$ (2形式) 与基选取无关, 从而是 I 本身的不变量.

注意到: 另一个2形式 $\omega_1\wedge\omega_2$ 是 I 的面积元, 亦与基的选取无关

定义: 令 $(D,I)$ 为二维黎曼流形. 定义其曲率(或高斯曲率) $K$ 为

$$K \doteq -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2} \quad \left(= \frac{d\tilde{\omega}_{12}}{\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_2}\right).$$

Levi-Civita 联络的~~几何解释~~对偶解释 = 对切向量求导!

即 协变导数

$\Omega_D = \mathcal{G}\{du,\ dv\}$

$T_D = \Omega_D^* = \mathcal{G}\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$，其中

$\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ 是 $\{du, dv\}$ 的对偶基：即

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}(du) = 1, & \frac{\partial}{\partial u}(dv) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}(du) = 0, & \frac{\partial}{\partial v}(dv) = 1 \end{cases}$$

如上：$I = \omega_1^2 + \omega_2^2$，$d\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix}$

记 $\{e_1, e_2\}$ 为 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 的对偶. 即

$$e_i(\omega_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i,j \le 2.$$

则 $\{e_1, e_2\}$ 为 $T_D$ 的一组 $\mathcal{G}$-基.

定义：设 $(D, I)$ 如上给出.

令：联 $\nabla_I : T_D \longrightarrow T_D \otimes \Omega_D$

$$f_1e_1 + f_2e_2 \longmapsto \nabla_I(f_1e_1+f_2e_2) \hat{=} (df_1 - f_2\omega_{12})e_1 + (df_2 + f_1\omega_{12})e_2$$

矩阵形式：

$$\nabla_I\left[(f_1, f_2)\begin{pmatrix}e_1 \\ e_2\end{pmatrix}\right] = [d(f_1, f_2)]\begin{pmatrix}e_1 \\ e_2\end{pmatrix} + (f_1, f_2)\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1 \\ e_2\end{pmatrix}$$

$$= \left[(df_1, df_2) + (f_1, f_2)\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}e_1 \\ e_2\end{pmatrix}$$

$\nabla_I$ 称为 D上关于 I 的协变导数 (covariant derivative)

例子: $I_0 = du^2 + dv^2$

$w_1 = du, \quad w_2 = dv, \quad w_{12} = 0$

$e_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial v}$, 故

$$\nabla_{I_0}\left(f\frac{\partial}{\partial u} + g\frac{\partial}{\partial v}\right) = (df, dg)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\\ \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}$$

特别地 $\nabla_{I_0}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \nabla_{I_0}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = 0$. 我们 $\boxed{\nabla_{I_0} \text{ 称为标准协变导数}}$。

一个比较好的方式是定义 $\nabla_I$ 的方向导数:

定义: 记 $\nabla = \nabla_I$. 对任一 $X \in T_D$, 定义

$$\nabla_X : T_D \longrightarrow T_D$$

$$(f_1 e_1 + f_2 e_2) \mapsto \nabla_X(f_1 e_1 + f_2 e_2) \triangleq$$

$$[X(df_1 - f_2 w_{12})]e_1 + [X(df_2 + f_1 w_{12})]e_2$$

注意: $X(df_1 - f_2 w_{12})$ 与 $X(df_2 + f_1 w_{12})$ 是 G 的元素, 即它们是函数。我们以 $X(df_1 - f_2 w_{12})$ 为例, 来具体表达这个元素:

记 $X = a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}$, $a, b \in G$, $w_{12} = c\,du + d\,dv$, $c, d \in G$

则 $X(df_1 - f_2 w_{12}) = \left(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}du + \frac{\partial f_1}{\partial v}dv - (f_2 \cdot c)du - (f_2 \cdot d)dv\right)$

$$= \left(a\cdot\frac{\partial f_1}{\partial u} - ac f_2\right) + \left(b\frac{\partial f_1}{\partial v} - bd f_2\right)$$

$$= a\frac{\partial f_1}{\partial u} + b\frac{\partial f_1}{\partial v} + f_2\cdot(ac+bd) \quad \in \mathcal{O}.$$

标准协变导数

$\nabla_I$ 与 $\nabla_{I_0}$ 的比较:

设 $e \overset{\Delta}{=} (e_1, e_2)$, $f \overset{\Delta}{=} (f_1, f_2)$, $w \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} 0 & w_{12} \\ -w_{12} & 0 \end{pmatrix}$

$f\cdot e \overset{\Delta}{=} f_1 e_1 + f_2 e_2$, $df \overset{\Delta}{=} (df_1, df_2)$

则 $\nabla_I(f\cdot e) = \boxed{df\cdot e} + \boxed{f\cdot w\cdot e}$

$I$

$= \cancel{(df + f\cdot w)\cdot e}$

所以 $\nabla_I$ 与 $\nabla_{I_0}$ 的区别在于 $w$ 这一项.

命题: 设 $\mu_1, \mu_2 \in T_D$, $a \in \mathcal{O}$. 则有

(1) $\nabla_I(\mu_1 + \mu_2) = \nabla_I(\mu_1) + \nabla_I(\mu_2)$ (可加性)

(2) $\nabla_I(a\cdot\mu_1) = da\cdot\mu_1 + a\cdot\nabla_I(\mu_1)$ (莱布尼兹法则)

*. (3) $d\left(\langle \mu_1, \mu_2\rangle_I\right) = \langle \nabla_I(\mu_1), \mu_2\rangle_I + \langle \mu_1, \nabla_I(\mu_2)\rangle_I$ (保内积I)

注记:

其中(1),(2)条也被标准协变导数满足; 但(3)条满足当且仅当 $I \sim I_0$ (等距的)

证明：(1),(2) 直接由定义给出，留做习题。我们证明(3)：

令 $\mu_i = a_{i1} e_1 + a_{i2} e_2 = a_i \cdot e$

注意到：$\langle e_i, e_j \rangle_I = \cancel{w_1(e_i)}\ e_i(w_1) \cdot e_j(w_1) + e_i(w_2) \cdot e_j(w_2)$

$$= \delta_{ij}$$

所以 $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_I = \cancel{\|a_i\|^2 = (a_{i1}^2 + a_{i2}^2)} = a_{11} \cdot a_{21} + a_{12} \cdot a_{22}$

$$\nabla_I (\mu_i) = \nabla_I (a_i \cdot e)$$

$$= da_i \cdot e + a_i \cdot w \cdot e$$

$\Rightarrow \langle \nabla_I(\mu_1), \mu_2 \rangle_I$

$$= \langle (da_1 + a_1 \cdot w) e,\ a_2 \cdot e \rangle_I$$

$$= \cancel{da_1 \cdot a_2^T +}$$

$$(da_{11}, da_{12}) \cdot \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} + w_{12} \cdot (-a_{12}, a_{11}) \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

同理：$\langle \nabla_I(\mu_2), \mu_1 \rangle_I$

$$= (da_{21}, da_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} + w_{12} \cdot (-a_{22}, a_{21}) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$$

$+$

$\Rightarrow \langle \nabla_I(\mu_1), \mu_2 \rangle_I + \langle \mu_1, \nabla_I(\mu_2) \rangle_I = (da_{11} \cdot a_{21} + a_{11} da_{21}) + (da_{12} \cdot a_{22} + a_{12} da_{22}) = d\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_I$

#

命题：$\nabla_I$ 不依赖于 $\{w_1, w_2\}$ 的选取，是由 $I$ 唯一确定的。

即设 $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ 满足 $I = \tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2$。并记 $\tilde{w}_{12}$ 为对应于 $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ 的 Levi-Civita 联络 1-形式。及 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ 为 $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ 的对偶基，则对 $\forall$ $f_1 e_1 + f_2 e_2 = \tilde{f}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{f}_2 \tilde{e}_2 \in T_D$，有

$$(df + f \cdot w) \cdot e = (d\tilde{f} + \tilde{f} \cdot \tilde{w}) \cdot \tilde{e}.$$

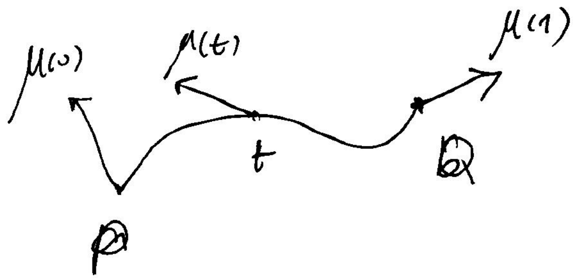
证明：习题。

## Levi-Civita 联络的几何解释．平行移动（parallel-transport）

令 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ 为 $D$ 中一曲线，$\gamma: [0,1] \longrightarrow D$。设 $P = \gamma(0)$（起点），$Q = \gamma(1)$（终点）。

定义：$\gamma$ 上切向量场 $\mu(t) = f_1(t) e_1(t) + f_2(t) e_2(t)$，称为沿 $\gamma$ 的平行向量场

若满足方程




$$(*) \begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} - f_2 \cdot \dfrac{d}{dt}(w_{12}) = 0 \\ \dfrac{df_2}{dt} + f_1 \cdot \dfrac{d}{dt}(w_{12}) = 0. \end{cases}$$

其中，记 $w_{12} = a\,du + b\,dv$，$\dfrac{d}{dt}(w_{12}) = a(t)\dfrac{du}{dt} + b(t)\dfrac{dv}{dt}$

方程 $(*)$ 可以简记为 $\nabla_\gamma \mu = 0$

由一阶线性常微分方程组理论，对给定任意初始切向量

$\mu_0 \in T_p O$，存在唯一沿 $\gamma$ 平行切向量场 $\mu(t)$，使得

$\mu(0) = \mu_0$.

如此，我们便定义了一个映射（平行移动）

$$P_\gamma : T_p O \longrightarrow T_Q O$$
$$\mu_0 \longmapsto \mu_1 = \mu(1)$$

命题：$P_\gamma$ 满足以下性质：

(1) $P_\gamma$ 线性映射；

(2) $P_\gamma$ 保内积，即

$$\langle P_\gamma(\lambda_0), P_\gamma(\mu_0)\rangle_{I(Q)} = \langle \lambda_0, \mu_0\rangle_{I(p)}$$
$$\forall \lambda_0, \mu_0 \in T_p O.$$

推论：$P_\gamma$ 是线性同构.

证明：(1) 令 $\mu_0, \lambda_0 \in T_p O$，令 $\mu(t), \lambda(t)$ 为沿 $\gamma$ 平行切向量场，

使得 $\mu(0) = \mu_0$，$\lambda(0) = \lambda_0$，令 $a, b \in \mathbb{R}$

则 ~~易~~验证 $a\mu(t) + b\lambda(t)$ ~~也~~亦为沿 $\gamma$ 平行切向量场，且
（习题）

则 $P_\gamma(a\mu_0 + b\lambda_0) = a\mu(1) + b\lambda(1) = a P_\gamma(\mu_0) + b P_\gamma(\lambda_0)$.

(2) 考察 $\gamma$ 上函数 $\langle \mu(t), \lambda(t)\rangle_{I(t)}$.

断言：上述函数为常数.

事实上：$\dfrac{d}{dt}\left(\langle \mu(t), \lambda(t)\rangle_{I(t)}\right)$

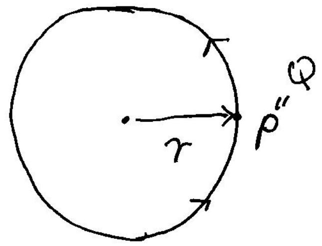
$$= \langle \overset{0}{\overset{\|}{\nabla_\gamma(\mu)}}, \lambda\rangle_I + \langle \mu, \overset{0}{\overset{\|}{\nabla_\gamma(\lambda)}}\rangle_I$$

$= 0$.

#

例子：(1) $I_0 = du^2 + dv^2$ $\qquad \omega_{12} \equiv 0$.

$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow (r\cos t, r\sin t)$. $\quad r =$ 常数




此时：$P = \gamma(0) = \gamma(2\pi) = Q$

故 $P_\gamma: T_P D \longrightarrow T_Q D = T_P D$ 是自同构映射，且保内积.

令 $e_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}$, $\quad e_2 = \dfrac{\partial}{\partial v}$.

对于 $\mu(0) = a\, e_1(p) + b\cdot e_2(p)$，求解方程

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} - f_2 \cdot \dfrac{d}{dt}\overset{0}{\overset{\|}{\omega_{12}}} = 0 \\ \dfrac{df_2}{dt} + f_1 \cdot \dfrac{d}{dt}\overset{0}{\overset{\|}{\omega_{12}}} = 0 \end{cases}, \qquad f_1(0) = a, \quad f_2(0) = b$$

$\Rightarrow f_1(t) = f_1(0), \quad f_2(t) = f_2(0)$

故 $P_\gamma = Id$. 证

沿着 $\gamma = \gamma(t)$，我们有.

$$\frac{d}{dt} \cdot w_{12} =$$

$$- \frac{2r\sin t}{1+r^2} \cdot \sin t - \frac{2r\cos t}{1+r^2} \cos t$$

$$= \frac{-2r}{1+r^2}$$

— 要解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} + f_2 \cdot \dfrac{2r}{1+r^2} = 0 \\ \dfrac{df_2}{dt} - f_1 \cdot \dfrac{2r}{1+r^2} = 0, \end{cases}$$

初始值：

$$\begin{cases} f_1(0) = a \\ f_2(0) = b \end{cases}$$

~~令 $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2r}{1+r^2} \\ \frac{2r}{1+r^2} & 0 \end{pmatrix}$. 则~~

—

$$\cancel{\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \exp.(At + B)},$$

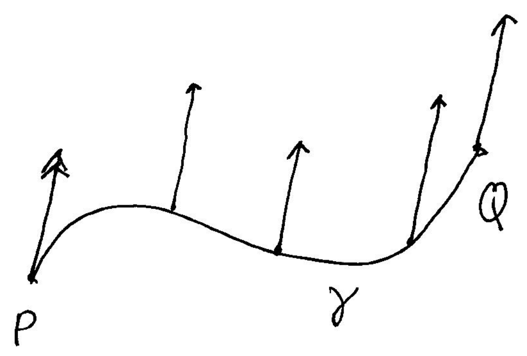
考虑： $f = f_1 + i f_2$，则有

$$\frac{df}{dt} = i\tilde{r} \cdot f \qquad \tilde{r} = \frac{2r}{1+r^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(t) = c \cdot e^{i\tilde{r}t}$$

其中 $C = a + ib$.

事实上，该计算对任意 $\gamma$ 均成立.




(2) $\quad \mathrm{I} = \dfrac{1}{(1+(u^2+v^2))^2}(du^2+dv^2), \qquad \gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow (r\cos t, r\sin t)$.

$$\omega_1 = \frac{du}{1+(u^2+v^2)}, \qquad \omega_2 = \frac{dv}{1+(u^2+v^2)}$$

$$\omega_{12} = \cancel{(1+u^2+v^2)^2\{(\partial_u (1+ \ -\partial_v)[(1+u^2+v^2)^{-1}]\}}$$

$$-(1+(u^2+v^2))^2\cdot[\partial_v (1+u^2+v^2)^{-1}]\,\omega_1 \quad +$$

$$(1+(u^2+v^2))^2\cdot[\partial_u (1+u^2+v^2)^{-1}]\cdot\omega_2$$

$$= (1+u^2+v^2)^2\cdot\frac{2v}{(1+u^2+v^2)^2}\cdot\omega_1$$

$$- (1+u^2+v^2)^2\cdot\frac{2u}{(1+u^2+v^2)^2}\cdot\omega_2$$

$$= 2v\cdot\omega_1 - 2u\,\omega_2$$

$$= \frac{2v\,du - 2u\,dv \quad \cancel{2d(uv)}}{1+u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(t) = a\cos(\tilde{r}t) - b\sin(\tilde{r}t) \\ f_2(t) = a\sin(\tilde{r}t) + b\cos(\tilde{r}t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_\gamma : \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}^2}}{T_p D} \xrightarrow{\sim} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}^2}}{T_0 D}$$

$T_pD \overset{\shortparallel}{=} \mathbb{R}^2\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{4\pi r}{1+r^2}\right) & -\sin\left(\frac{4\pi r}{1+r^2}\right) \\ \sin\left(\frac{4\pi r}{1+r^2}\right) & \cos\left(\frac{4\pi r}{1+r^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{array}$$

注记：(Levi-Civita) 联络 协变导数的 无穷小版本就是平行移动. 我们也可以从平行移动出发 得到 协变导数. 详见《黎曼几何初步》. 伍鸿熙 等著. 22-24页.

Levi-Civita 联络在曲面外蕴时的表现：

对一个二维内蕴曲面 $(D, \mathrm{I})$, 你为外蕴, 即 $\exists\ r: D \to S \subset \mathbb{R}^3$, 使得 $S$ 的第一基本型为 $\mathrm{I}$. 简言之: $(D, \mathrm{I})$ 是某个 $(D, \mathrm{I}, \mathrm{II})$ 的 $(D, \mathrm{I})$ 部分.

注意到: 通过 $r$, 我们有自然映射:

$$r_*: T_D \to \cancel{(T\mathbb{R}^3)|_S}\ T_S \subset T_{\mathbb{R}^3}|_S.$$

$$f\frac{\partial}{\partial u} + g\frac{\partial}{\partial v} \longmapsto f\cdot r_u + g\cdot r_v$$

命题: 令 $I = w_1^2 + w_2^2$, $\{e_1, e_2\}$ 为 $\{w_1, w_2\}$ 的对偶基.

则 $\{r_*(e_1), r_*(e_2)\}$ 为 $S$ 上的正交标架.

证明: 习题.

为了记号~~数~~的方便, 我们也记 $e_i = r_*(e_i)$, $i=1,2$.

并令 $e_3 = e_1 \times e_2 = n$, $r$ 的单位法向量

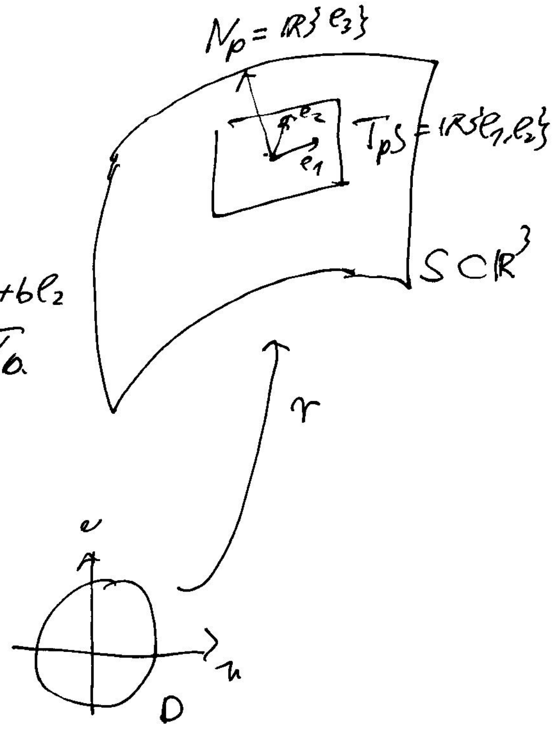
则 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 构成 $S$ 上的正交标架. 则运动方程 $\Rightarrow$

$$de_i \in T_{\mathbb{R}^3}|_S \otimes \Omega_S = T_S \otimes \Omega_S \oplus N_S \otimes \Omega_S$$

$$de_i = \nabla_{I_0}(e_i), \quad T_S \otimes \Omega_S = \mathcal{G}\{e_1, e_2\} \otimes \Omega_S, \quad N_S \otimes \Omega_S = \mathcal{G}\{e_3\} \otimes \Omega_S$$

$(\mathbb{R}^3, I_0 = dx^2 + dy^2 + dz^2)$

具体得:
$$\begin{cases} de_1 = w_{12} e_2 + w_{13} e_3 \\ de_2 = -w_{12} e_1 + w_{23} e_3 \end{cases}$$




命题: 令 $\nabla = \nabla_I$ 为 $(D, I)$ 的 Levi-Civita 协变导数.

则对 $\forall \mu = f_1 e_1 + f_2 e_2 \in T_D$, 及 $\forall v = a e_1 + b e_2 \in T_D$

$$r_*(\nabla_v(\mu)) = \Pr \circ \left[ d_{r_*(v)}(r_*(\mu)) \right].$$

$d_{r_*(v)}$: 沿 $v$ 的方向导数; $T_{\mathbb{R}^3}|_S = T_S \oplus N_S \to T_S$

其中 $\Pr: T_{\mathbb{R}^3}|_S \to T_S$ 的垂直投影.

证明: 习题.